GUIDE TO THE APPLICATIONS OF THE LAPLACE AND Z-TRANSFORMS

山口慶太

§41. The Difference Equation of Second Order　(8 行目～)
異なる２次方程式

The difference equation of second order is
異なる 2 次方程式は

(41.1)　$y_{n+2} + c_1 y_{n+1} + c_0 y_n = f_n$

and the initial values y_0, y_1 are specified.
であり、初期値 y_0, y_1 が明記されている。

Using the second displacement theorem, the image equation is
２次置換の定理を用いることで、図の式は以下のようになる。

$$z^2[Y^*(z) - y_0 - y_1 z^{-1}] + c_1 z[Y^*(z) - y_0] + c_0 Y^*(z) = F^*(z)$$

On writing
以下のように書かれている式は、

$$z^2 + c_1 z + c_0 = p(z)$$

the solution can be expressed in the form
以下の式の形で表現でき、

(41.2)　$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$

where neither of the zero points α_1, α_2 is zero, for otherwise c_0 would be zero and equation (41.1) would reduce to one of first order for y_{n+1}.
そこでは零点の α_1、α_2 のどちらも 0 にはならず、そうでなければ c_0 は 0 になり、式(41.1)は y_{n+1} の最初の次数の一つに変化する。

We now decompose the multiplier of y_1 into partial fractions
我々は今、y_1 の乗数を以下の式の分数の一部分に分解する。

$$\frac{z}{p(z)} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\frac{z}{z-\alpha_1} - \frac{z}{z-\alpha_2}\right) & \text{for } \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \frac{z}{(z-\alpha_1)^2} & \text{for } \alpha_1 = \alpha_2 \end{cases}$$

From Table 37.1, Nos.5, 6,
表 37.1 の No.5,6 から

(41.3) $\frac{z}{p(z)} \bullet - \circ \begin{Bmatrix} \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} & \text{for} & \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ n\alpha_1^{n-1} & \text{for} & \alpha_1 = \alpha_2 \end{Bmatrix} = q$

Since $q_0=0$, from the second displacement theorem (38.2)

$q_0=0$ なので、二つ目の変位の定理(38.2)から、

(41.4) $\frac{z^2}{p(z)} = z\frac{z}{p(z)} \bullet - \circ q_{n+1}$

and from the first displacement theorem (38.1)

そして、もし q－1 が 0 になると定義されるなら、一つ目の変位の定理(38.1)から、

(41.5) $\frac{1}{p(z)} = z^{-1}\frac{z}{p(z)} \bullet - \circ q_{n-1}$

if q_{-1} is defined to be zero.

となる。

Application of the convolution theorem (38.7) to (41.2) gives the original sequence

(41.2)に対する(38.7)の畳み込みの定理の応用は、以下のオリジナルの連続式を得られる。

(41.6) $y_n = \sum_{v=0}^{n} q_{v-1} f_{n-v} + y_0(q_{n+1} + c_1 q_n) + y_1 q_n$

Because $q_0 = q_{-1} = 0$ the summation runs over the values ν = 2 to ν = n, since the terms with ν = 0 and 1 are zero.

$q_0=q_{-1}=0$ なので、ν=0 と 1 の項が 0 になる時から、和は ν=2 の値から ν=n に移る。

Explicitly for $\alpha_1 \neq \alpha_2$ we have

$\alpha_1 \neq \alpha_2$ は明確であり、以下のようになる。

$$y_n = \sum_{v=2}^{n} f_{n-v} \frac{\alpha_1^{v-1} - \alpha_2^{v-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} - y_0 \left[\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + c_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}\right] + y_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

On using the relations $c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ and $\alpha_1\alpha_2 = c_0$ this expression, for $\alpha_1 \neq \alpha_2$, simplifies to

$c_1=-(\alpha_1+\alpha_2)$と $\alpha_1\alpha_2=c_0$ の関係を用いて、$\alpha_1 \neq \alpha_2$ よりこの式は、以下のように簡単になる。

(41.7) $y_n = \sum_{v=2}^{n} f_{n-v} \frac{\alpha_1^{v-1} - \alpha_2^{v-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} - y_0 c_0 \frac{\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + y_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}$

The corresponding expression for the case $\alpha_1 = \alpha_2$ is

$\alpha_1=\alpha_2$ の場合の一致する表現は以下の式になる。

(41.8) $y_n = \sum_{v=2}^{n} f_{n-v}(v-1)\alpha_1^{v-2} - y_0 c_0 (n-1)\alpha_1^{n-2} + y_1 n \alpha_1^{n-1}$

For the second-order equations the transformation back into original space of the solution in image space can be performed without decomposition into partial fractions (as for the corresponding differential equations, see (11.6 – 11.9)).
二次式より、仮想空間における解の最初の空間へ戻る変化は、分数の一部に分解されずに実行できる（異なる式の一致として(11.6-11.9)に示す)。

We set aside the case $\alpha_1 = \alpha_2$, which occurs when $c_0 - c_1^2/4 = 0$, since it cannot be further simplified from the previous expression.
我々は、前の式からさらに簡単にはできないため、$c_0 - c_1^2/4 = 0$ の時に出てくる $\alpha_1 = \alpha_2$ の場合を無視する。

From TAB. 37.1 Nos. 11, 13 with $a \neq 0$ and $\sinh\tau \neq 0$
表 37.1 の、$a\neq0$ で $\sinh\tau\neq0$ の時の 11, 13 から、以下のようになる。

(41.9) $\frac{z}{z^2-2az\cosh\tau+a^2} o - o a^{n-1}\frac{\sinh\tau n}{\sinh\tau}$

(41.10) $\frac{z(z-2a\cosh\tau)}{z^2-2az\cosh\tau+a^2} o - o - a^{n}\frac{\sinh\tau(n-1)}{\sinh\tau}$

It follows from the second displacement theorem applied to (41.9) that
以下の式は(41.9)に適応された２つ目の変位定理から続き、

(41.11) $\frac{1}{z^2-2az\cosh\tau+a^2} o - o a^{n-2}\frac{\sinh\tau(n-1)}{\sinh\tau}$

where the right-hand side is put equal to zero for n = 0 (for n = 1 it is automatically zero).
となり、そこでは n=0 の場合右辺に=0 が入れられる（n=1 の場合自動的に 0 になる)。

The denominator of this expression is exactly equal to p(z) if
この式の分母は、もし以下の式であるなら、p(z)に正確に等しくなる。
(41.12) $-2a\cosh\tau = c_1, \quad a^2 = c_0$

Then
その時、

$$c_0 - \frac{c_1^2}{4} = a^2(1-\cosh^2\tau) = -a^2\sinh^2\tau$$

and $\sinh\tau \neq 0$ since $c_0 - c_1^2/4 \neq 0$ ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), so that formulae (41.7, 41.9) are defined.
であり $c_0 - c_1^2/4 \neq 0(\alpha_1\neq\alpha_2)$ なので $\sinh\tau\neq0$ となり、そのため(41.7, 41.9)の方式が定義される。

Now the original sequence corresponding to (41.2) can be written as

今、(41.2)に一致するオリジナルの連続式は

(41.13) $y_n = \frac{1}{\sinh \tau}\{\sum_{v=2}^{n} a^{v-2} \sinh \tau\,(v-1) f_{n-v} - y_0 a^n \sinh \tau\,(n-1) + y_1 a^{n-1} \sinh \tau\, n\}$

in which a and τ are to be determined from the coefficients c_0, c_1 by (41.12).

このように書くことができ、ここでは a と τ は式(41.12)より係数 c_0, c_1 から決定される。

This expression is more convenient than (41.6) for numerical work in the cases when c_0 and c_1 are complex numbers, as in, for example, the problem in § 44.

この式は、例えば§44 における問題での c_0 と c_1 が複素数である場合、(41.6)の数値の働きよりも便利である。

The hyperbolic functions are also tabulated for complex argument.

双曲線関数もまた複素変数で表示される。

Formulae (41.9 – 41.11) are useful also for difference equations of higher order, when both linear and quadratic denominators appear in the partial fraction decomposition ; for example, linear factors in p(z) which are complex conjugates are combined into a single quadratic factor.

(41.9-41.11)の方式もまた､線形そして二次式の分母が分数の一部分の分解において現れる時､より高度な状態の異なる式に役立つ。それは例えば､共役の複素数である p(z)における線形要素は一つの二次式の要素へ含まれるということである。